

К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ ПОРЯДКА АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ ЧЕЛОВЕКА (В МЕДИЦИНСКОМ ПРИБОРОСТРОЕНИИ)

И. О. Жаринов

Аннотация: статья посвящена рассмотрению вопросов, возникающих при решении задач анализа и статистической обработки сигналов электроэнцефалограммы человека. Основное внимание уделено анализу методов формирования параметрического описания ЭЭГ в целях математической аппроксимации экспериментальных данных. Приведены сравнительные результаты обработки реальных ЭЭГ различными методами.

Введение

С момента открытия электроэнцефалографических (ЭЭГ) сигналов прошло уже более полувека. ЭЭГ, отводимые с поверхности головы человека, представляют собой флуктуации электрического потенциала и отражают биологическую активность клеток головного мозга. До сих пор нет удовлетворительной гипотезы об электрофизиологической природе формирования сигнала, однако это не является существенным препятствием к его использованию как неинвазивного диагностического средства для обнаружения многих неврологических нарушений. Интерес к извлечению полезной информации из реализаций непрерывно возрастает. По мере развития и улучшения показателей качества вычислительной техники появляются новые, более сложные методы обработки.

Существенным недостатком традиционного анализа ЭЭГ является субъективность выделения специалистом диагностических признаков. Так, статистика показывает, что результаты предварительного анализа, полученные разными специалистами по одной и той же реализации, различаются в среднем на 20%. Более того, даже один и тот же специалист через несколько месяцев после первого анализа по той же реализации получает результаты, отличающиеся от первых в среднем на 13%.

Создание современных систем автоматического анализа ЭЭГ в значительной мере осложнено отсутствием эффективного математического аппарата, основанного на вероятностных критериях обработки стохастических сигналов. Авторегрессионный анализ, широко применяемый при решении задач различения шумоподобных сигналов инфранизкочастотного диапазона по малым зависимым выборкам, позволяет реализовывать процедуры статистического распознавания, как правило, только при наличии заданного набора возможных состояний. В предметной области метода электроэнцефалографии набор отождествляется с алфавитом физиологических проявлений на ЭЭГ, где каждому конкретному состоянию соответствует одна параметрическая модель, а вариабельность сводится к различиям статистических свойств сигнала и оценочным значениям коэффициентов.

Если же алгоритмы распознавания образов для заданного конечного множества объектов (классов сигналов) хорошо разработаны, и являются достаточно универсальными, то задача формирования самого множества классов из исходной ЭЭГ не всегда может быть формализована. Поэтому часто диагностические признаки сначала выделяются экспертом — специалистом-электрофизиологом, — после чего по выделенным отрезкам формируются математические модели и только тогда компьютер «научится» автоматически распознавать выделенные классы. В такой постановке задача алгоритмического обучения носит название «обучения с учителем».

1. Авторегрессионный анализ в электроэнцефалографии

Использование для анализа и математической аппроксимации ЭЭГ-сигналов параметрических моделей авторегрессии-скользящего среднего (АРСС) находится сейчас в стадии интенсивного развития: совершенствуются вычислительные методы, уточняются статистические аспекты, выясняются границы применимости.

АРСС–анализ [3,4] базируется на предположении, что текущие значения сигнала имеют существенную статистическую связь с его «предысторией». АРСС–модель ЭЭГ представляет значения дискретных отсчетов $y^{(i)}[n]$ i -го квазистационарного участка посредством линейного соотношения вида

$$y^{(i)}[n] + \sum_{k=1}^{p^{(i)}} a_k^{(i)} \cdot y^{(i)}[n-k] = b_0^{(i)} \cdot x[n] + \sum_{k=1}^{q^{(i)}} b_k^{(i)} \cdot x[n-k], \quad i=1,2,\dots,M, \quad (1)$$

где $\{x[n]\}$ — порождающий процесс — последовательность независимых, нормально распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Коэффициенты $\{a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \dots, a_{p^{(i)}}^{(i)}\}$ и $\{b_0^{(i)}, b_1^{(i)}, \dots, b_{q^{(i)}}^{(i)}\}$, а также величины $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ являются параметрами модели. Параметры $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ определяют порядок модели авторегрессии (АР) и скользящего среднего (СС) соответственно, а величина $(p^{(i)} + q^{(i)})$ определяет порядок АРСС–модели. Индекс (i) означает описание фрагмента сигнала моделью i -го класса из M возможных взаимоальтернативных классов.

Адекватную параметрическую модель ЭЭГ удастся получить [2], даже полагая коэффициенты $\{b_1^{(i)}, \dots, b_{q^{(i)}}^{(i)}\}$ равными нулю. При этом уравнение определяет чисто АР–модель

$$y^{(i)}[n] + \sum_{k=1}^{p^{(i)}} a_k^{(i)} \cdot y^{(i)}[n-k] = b_0^{(i)} \cdot x[n], \quad i=1,2,\dots,M. \quad (2)$$

В последующем, через параметры АРСС–модели могут быть выражены временная модель сигнала, оценки частотных и корреляционных функций, определены отрезки стационарности сигнала, решены задачи сегментации и классификации ЭЭГ.

В частности, при известных параметрах АРСС–модели оценка функции спектральной плотности мощности (см. рис.1) реализации i -го класса имеет вид

$$S^{(i)}(f) = \sigma^2 \Delta t \cdot \left| b_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{q^{(i)}} b_k^{(i)} \cdot \exp(-j2\pi f k \Delta t) \right|^2 / \left| 1 + \sum_{k=1}^{p^{(i)}} a_k^{(i)} \cdot \exp(-j2\pi f k \Delta t) \right|^2, \quad (3)$$

$i=1,2,\dots,M,$

где Δt – период дискретизации сигнала; σ^2 – дисперсия порождающего БШ $\{x[n]\}$; j – мнимая единица.

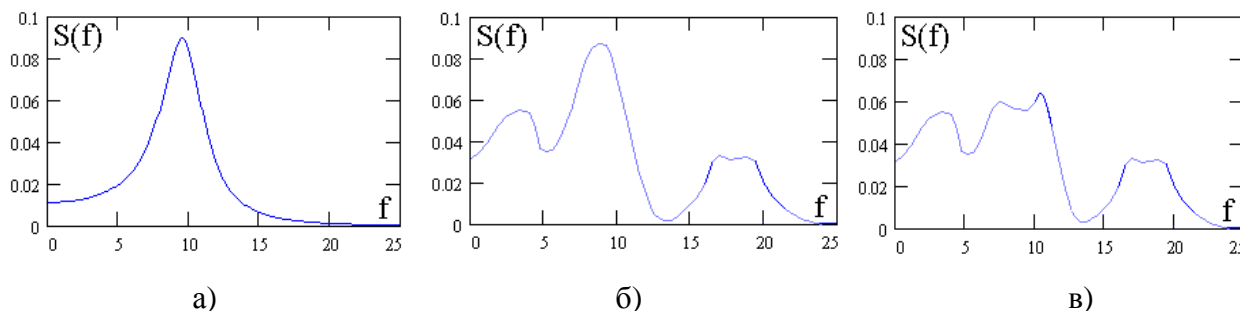


Рис.1. Примеры авторегрессионных оценок функции спектральной плотности мощности: а) АР–моделей; б) АРСС–моделей; в) СС–моделей.

Уравнению авторегрессии отвечает линейный цифровой формирующий фильтр (ФФ), который входной последовательности $\{x[n]\}_0^{N-1}$ ставит в соответствие выходную последовательность $\{y^{(i)}[n]\}_0^{N-1}$. Передаточная функция (ПФ) этого фильтра имеет следующий вид:

$$W^{(i)}(z) = \left(\sum_{k=0}^{q^{(i)}} b_k^{(i)} \cdot z^{-k} \right) / \left(1 + \sum_{k=1}^{p^{(i)}} a_k^{(i)} \cdot z^{-k} \right), \quad i=1,2,\dots,M. \quad (4)$$

Тогда, если гауссовский стационарный некоррелированный порождающий процесс $\{x[n]\}$ пропустить через ФФ, то на его выходе будет реализация сигнала i -го класса, обладающая достаточным сходством с исходной физиологической кривой. Причем специалисты-электрофизиологи отмечают [2], что исходные и синтезированные с помощью ФФ реализации визуально практически не отличаются друг от друга.

Диапазоны значений, принимаемых весовыми коэффициентами параметрической модели, должны ограничиваться требованиями стационарности и обратимости сигналов.

Условие стационарности определяется условиями устойчивости ФФ. Фильтр устойчив, если полюса его ПФ находятся внутри круга единичного радиуса на Z -плоскости. Иными словами, корни $z_k^{(i)}, k=1,2,\dots, p^{(i)}, i=1,2,\dots,M$ характеристического уравнения

$$z^{p^{(i)}} + \sum_{k=1}^{p^{(i)}} a_k^{(i)} \cdot z^{p^{(i)}-k} = 0, \quad i=1,2,\dots,M \quad (5)$$

должны удовлетворять неравенству $|z_k^{(i)}| < 1, k=1,2,\dots, p^{(i)}, i=1,2,\dots,M$.

Нестационарный характер модели ЭЭГ может учитываться зависимостью коэффициентов $\{a_k^{(i)}\}, k=1,2,\dots, p^{(i)}$ и $\{b_k^{(i)}\}, k=0,1,\dots, q^{(i)}$, от времени: $\{a_k^{(i)}[n]\}$ и $\{b_k^{(i)}[n]\}$.

Условие обратимости формулируется следующим образом: дискретный сигнал обратим только тогда, когда корни $z_k^{(i)}, k=1,2,\dots, q^{(i)}, i=1,2,\dots,M$ характеристического уравнения

$$1 + \frac{b_1^{(i)}}{b_0^{(i)}} \cdot z^{-1} + \frac{b_2^{(i)}}{b_0^{(i)}} \cdot z^{-2} + \dots + \frac{b_{q^{(i)}}^{(i)}}{b_0^{(i)}} \cdot z^{-q^{(i)}} = 0, \quad i=1,2,\dots,M \quad (6)$$

удовлетворяют неравенству $|z_k^{(i)}| < 1, k=1,2,\dots, q^{(i)}, i=1,2,\dots,M$.

Диапазоны изменения значений весовых коэффициентов АРСС-моделей малых порядков, соответствующие условию устойчивости и обратимости, приведены в табл. 1.

Диапазоны изменения значений коэффициентов моделей ЭЭГ

Таблица 1

Вид модели	Диапазоны изменения коэффициентов
АР-модель $(p^{(i)} = 1)$	$-1 < a_1^{(i)} < 1$
АР-модель $(p^{(i)} = 2)$	$1 + a_1^{(i)} + a_2^{(i)} > 0; 1 - a_1^{(i)} + a_2^{(i)} > 0; -1 < a_2^{(i)} < 1$
АРСС-модель $(p^{(i)} = 2), (q^{(i)} = 1)$ и т.д.	$1 + a_1^{(i)} + a_2^{(i)} > 0; 1 - a_1^{(i)} + a_2^{(i)} > 0;$ $-1 < a_2^{(i)} < 1; -1 < b_1^{(i)} / b_0^{(i)} < 1$

2. Задача формирования параметрического описания ЭЭГ

Задача формирования описания признаков классов ЭЭГ может рассматриваться (см. рис. 2) как известная задача подбора математической модели определенного класса, адаптированная к стационарным или квазистационарным случайным процессам. Такую задачу принято решать в четыре этапа:

Концептуальный выбор класса моделей. Выбор класса параметрических моделей требует некоторых предварительных сведений о возможной форме функции спектральной плотности (см. рис.1) для наблюдаемых реализаций аппроксимируемого сигнала.

Если необходимо сформировать модели сигналов с острыми спектральными пиками, но без глубоких впадин (нулей), то наиболее подходящей является АР–модель. СС–модель

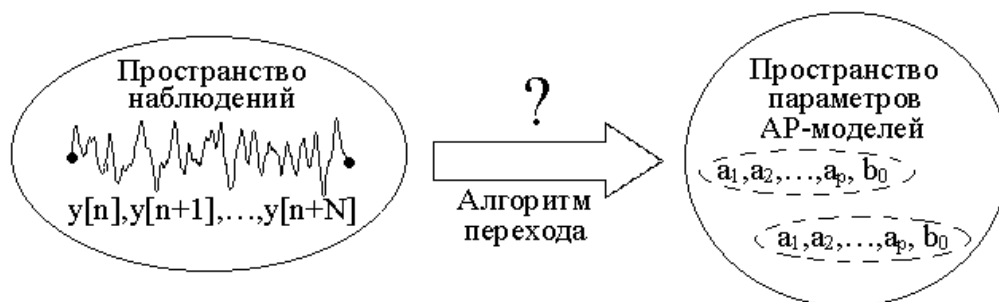


Рис. 2. Диаграмма параметрического синтеза моделей ЭЭГ–сигналов.

удовлетворительно аппроксимирует сигнал, если необходимы спектры с глубокими нулями, но без острых пиков. Что же касается АРСС–модели, то она может применяться в обоих этих предельных случаях. В тех случаях, когда одинаково пригодна любая из трех моделей, следует использовать ту из них, которая имеет наименьшее число параметров. Этот принцип экономии связан с тем, что получить оценки с хорошими статистическими свойствами удастся тогда, когда число оцениваемых параметров минимально.

Идентификация порядка модели. Поскольку наилучшее значение порядка параметрической модели заранее не известно, на практике приходится испытывать несколько значений порядков. Базируясь на этом, вводится тот или иной критерий ошибки, по которому затем определяется требуемый порядок. Если порядок модели выбран слишком малым, получаются сильно сглаженные спектральные оценки сигнала, если излишне большим — увеличивается разрешение, но в оценке появляются ложные спектральные пики.

Интуитивно ясно, что следует увеличивать порядок модели до тех пор, пока вычисляемая ошибка аппроксимации не достигнет минимума. В большинстве процедур оценивания дисперсия ошибки монотонно уменьшается с увеличением порядка модели. Показано [4], что одной дисперсии обычно не достаточно для того, чтобы определить момент окончания рекуррентного изменения порядка модели. Необходимо некоторое значение этого порядка, при дальнейшем изменении которого скорость изменения дисперсии резко снижается.

Оценивание параметров модели. Традиционно в задачах оценивания параметров рассматривается ряд свойств оценок, важнейшими из которых являются: состоятельность, несмещенность, достаточность и эффективность.

Подтверждение качества модели. Существует по крайней мере два различных подхода к решению задачи проверки адекватности модели. В первом подходе проверяется адекватность допущений, положенных в основу модели. Для классов параметрических АР– и АРСС–моделей во многих случаях единственное существенное допущение состоит в том, что порождающий процесс $\{x[n]\}$ — это последовательность независимых случайных величин с нулевым средним. Используя выбранную модель и доступные наблюдения, можно получить оценки так называемых остатков или ошибок аппроксимации, и проверить предположение об их независимости с помощью теории проверки статистических гипотез.

Сущность второго подхода состоит в следующем. Чтобы удостовериться в адекватности модели, аппроксимирующей экспериментальные данные, необходимо непосредственно сравнить характеристики ее выходного сигнала, такие как коррелограммы, спектральные плотности, моментные характеристики и т.п. с соответствующими характеристиками исходных эмпирических данных. Осуществить такое сравнение можно аналитически или посредством математического моделирования. Модель принимается, если расхождение между двумя множествами характеристик не превышает одного–двух стандартных отклонений.

3. Оценивание параметров моделей

Оценивание параметров $\{a_k^{(i)}\}$ и $\{b_k^{(i)}\}$ линейного уравнения регрессии по имеющимся эмпирически полученным данным представляет собой одну из основных процедур прикладного статистического анализа [3]. Для этой цели широко применяется метод наименьших квадратов, всесторонне изученный и имеющий несколько теоретических обоснований. Он достаточно просто реализуется в виде специализированных программ расчетов оценок параметров и других характеристик линейной регрессионной связи между объясняющими и объясняемыми переменными. Такие программы для небольшого числа оцениваемых параметров и не очень большого числа используемых наблюдений имеются сегодня в прикладном программном обеспечении любого компьютера.

В настоящее время предложены многие постановки задачи оценивания, обобщающие схему наименьших квадратов как для одного уравнения регрессии, так и для системы таких уравнений. Соответствующие им методы рассматриваются в многочисленных работах по прикладной статистике. Многие из этих методов реализованы в виде отдельных программ и составляют ядро статистических пакетов для оценивания и решения систем уравнений. Потребность в доступных пользователю и надежно работающих программах, с помощью которых на основе линейных регрессионных уравнений строятся количественно определенные модели, не может считаться удовлетворенной. Особенно велик интерес к исследованиям, где разрабатываемые и предлагаемые математические модели и методы доводятся до реализации в виде программ, написанных на алгоритмических языках и переносимых в силу этого на различные вычислительные средства.

Удачным примером подхода, сочетающего систематическое изложение теории, математических методов и алгоритмов является подход, основанный на применении традиционных методов анализа стационарных процессов к формированию новых (по постановке задач синтеза) признаков классов ЭЭГ.

Авторегрессионные модели ЭЭГ формируются в основном методом решения систем линейных уравнений и позволяют в подавляющем большинстве технических приложений проводить исследования (сегментация ЭЭГ, классификация ЭЭГ и т.д.) с достаточной для практики точностью. Существует достаточно большое число различных методов, позволяющих оценивать параметры АР–моделей по экспериментальным данным. Широкое распространение получил известный метод Юла–Уолкера [4,6], основанный на решении одноименной системы уравнений

$$\begin{bmatrix} \hat{R}^{(i)}[0] & \hat{R}^{(i)}[-1] & \dots & \hat{R}^{(i)}[-p^{(i)}] \\ \hat{R}^{(i)}[1] & \hat{R}^{(i)}[0] & \dots & \hat{R}^{(i)}[-p^{(i)}+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{R}^{(i)}[p^{(i)}] & \hat{R}^{(i)}[p^{(i)}-1] & \dots & \hat{R}^{(i)}[0] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_1^{(i)} \\ \vdots \\ \hat{a}_{p^{(i)}}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{b}_0^{(i)})^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,\dots,M, \quad (7)$$

связывающей авторегрессионные параметры со смещенными оценками автокорреляционной функции выборок отдельных классов ЭЭГ. Система имеет однозначное решение, в частности по алгоритму Левинсона, с гарантированной устойчивостью формируемой модели, что особенно важно для обеспечения условий стационарности и обратимости сигналов. Оценки параметров модели получают [5] рекуррентным образом по нижеследующим выражениям

$$\hat{a}_{p^{(i)+1,k}^{(i)}} = \hat{a}_{p^{(i),k}^{(i)}} - \hat{a}_{p^{(i)+1,p^{(i)+1}^{(i)}}} \cdot \hat{a}_{p^{(i),p^{(i)+1-k}^{(i)}}, \quad k=1,2,\dots, p^{(i)}, \quad i=1,2,\dots,M \quad (8)$$

$$\hat{a}_{p^{(i)+1,p^{(i)+1}^{(i)}}} = \frac{\hat{r}^{(i)}[p^{(i)+1]} - \sum_{k=1}^{p^{(i)}} \hat{a}_{p^{(i),k}^{(i)}} \cdot \hat{r}^{(i)}[p^{(i)+1-k}]}{1 - \sum_{k=1}^{p^{(i)}} \hat{a}_{p^{(i),k}^{(i)}} \cdot \hat{r}^{(i)}[k]} \quad \left| \quad \hat{r}^{(i)}[k] = \frac{\hat{R}^{(i)}[k]}{\hat{R}^{(i)}[0]} \right. \quad (9)$$

где $\hat{R}^{(i)}[k]$ – смещенная оценка порядка k для автокорреляционной функции выборки.

При использовании несмещенных оценок АКФ автокорреляционная матрица R может оказаться неположительно–определенной [4], и, следовательно, эквивалентный ФФ будет неустойчивым.

Нулевой компонент скользящего среднего рассчитывается [5] с использованием уже известных оценок коэффициентов корреляции и параметров модели

$$\hat{b}_0^{(i)} = \frac{1}{1 - \hat{a}_1^{(i)} \cdot \hat{r}^{(i)}[1] - \hat{a}_2^{(i)} \cdot \hat{r}^{(i)}[2] - \dots - \hat{a}_{p^{(i)}}^{(i)} \cdot \hat{r}^{(i)}[p^{(i)}]} \quad , \quad i=1,2,\dots,M \quad (10)$$

Сформированная таким образом модель i -ого класса ЭЭГ представляет собой косвенное математическое описание реализации сигнала, заданное набором (вектором) вещественных параметров.

Описания признаков ЭЭГ, соответствующих разным $i=1,2,\dots,M$ образцам деятельности головного мозга, могут отличаться как значениями коэффициентов модели, так и порядками $p^{(i)}$.

4. Экспериментальные исследования ЭЭГ

С целью получения табулированных параметрических моделей различных классов ЭЭГ и апробации рассмотренной методики была проведена серия статистических экспериментов по обработке реального сигнала. Реализации получены на стандартной сертифицированной медицинской аппаратуре (цифровой электроэнцефалограф) с использованием специализированного программного обеспечения. Разделение сигнала на отдельные классы (информативные сегменты) выполнено специалистом–электрофизиологом заблаговременно (этап обучения). В эксперименте использовались выборки реализаций следующих пяти основных классов ЭЭГ:

- класс $i=1$: нормальный α – ритм;
- класс $i=2$: замедленный вариант α – ритма;
- класс $i=3$: убыстренный вариант α – ритма;
- класс $i=4$: пароксизмальная ЭЭГ–активность;
- класс $i=5$: наличие очаговой патологии.

Синтез параметрического описания производился на специально разработанном автором программном обеспечении в среде MathCad 6.0 с помощью реализованного рекуррентно алгоритма Левинсона. Входными параметрами для программы являются временные последовательности дискретных отсчетов реализаций классов ЭЭГ $y[n-N], y[n-N+1], \dots, y[n]$. В программе рассчитываются смещенные оценки АКФ последовательностей, производится их нормировка по уровню $R[0]$ (вычисление коэффициентов корреляции $r[k]$) и, далее, расчет авторегрессионных параметров. Параметры определяются рекуррентно (см. рис. 3) с вычислением оценок для различных заданных переменной $\max P$ порядков $p^{(i)}$.

Значения оценок хранятся в возвращаемых векторах А (нижнетреугольная двумерная матрица, параметры $(\hat{a}_1^{(i)}, \hat{a}_2^{(i)}, \dots, \hat{a}_{\hat{p}^{(i)}}^{(i)})$) и В (одномерный вектор, параметры $\hat{b}_0^{(i)}$) следующего вида

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{11}^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 & , & \hat{p}^{(i)} = 1 \\ \hat{a}_{21}^{(i)} & \hat{a}_{22}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & , & \hat{p}^{(i)} = 2 \\ \hat{a}_{31}^{(i)} & \hat{a}_{32}^{(i)} & \hat{a}_{33}^{(i)} & \dots & 0 & , & \hat{p}^{(i)} = 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \hat{a}_{\hat{p}^{(i)}1}^{(i)} & \hat{a}_{\hat{p}^{(i)}2}^{(i)} & \hat{a}_{\hat{p}^{(i)}3}^{(i)} & \dots & \hat{a}_{\hat{p}^{(i)}\hat{p}^{(i)}}^{(i)} & , & \hat{p}^{(i)} \geq p^{(i)} < p^{(i)} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_0^{(i)} & , & \hat{p}^{(i)} = 1 \\ \hat{b}_0^{(i)} & , & \hat{p}^{(i)} = 2 \\ \hat{b}_0^{(i)} & , & \hat{p}^{(i)} = 3 \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{b}_0^{(i)} & , & \hat{p}^{(i)} \geq p^{(i)} < p^{(i)} \end{bmatrix} . \quad (11)$$

Универсальность алгоритма позволяет автоматически рассчитывать авторегрессионные параметры ЭЭГ для различных заданных порядков. В частности, экспериментально полученные значения коэффициентов АР-моделей ($p^{(i)} = 9$) классов ЭЭГ приведены в таблице 2, а соответствующие им авторегрессионные оценки СПМ представлены на рис.4.

5. Свойства оценок

Предельное поведение компонентов $\hat{a}_k^{(i)}$, $k=1,2,\dots, \hat{p}^{(i)}$; $i=1,2,\dots,M$ векторной оценки параметров АР-модели определяется значениями корней $z_k^{(i)}$, $i=1,2,\dots,M$ характеристического уравнения. Наиболее хорошо изучен [1] случай асимптотического поведения оценок $\hat{a}_k^{(i)}$, $k=1,2,\dots, \hat{p}^{(i)}$; $i=1,2,\dots,M$, когда значения всех корней $z_k^{(i)}$, $i=1,2,\dots,M$ по модулю меньше 1.

```

A:=
  A1,1 ← R1
  A2,1 ←  $\frac{R_1 \cdot (1 - R_2)}{1 - R_1 \cdot R_1}$ 
  A2,2 ←  $\frac{(R_2 - R_1 \cdot R_1)}{1 - R_1 \cdot R_1}$ 
  for p ∈ 1..maxP - 1
    sum1 ← 0
    sum2 ← 0
    for s ∈ 1..p
      sum1 ← sum1 + Ap,s · Rp+1-s
      sum2 ← sum2 + Ap,s · Rs
    Ap+1,p+1 ←  $\frac{R_{p+1} - sum1}{1 - sum2}$ 
    for s ∈ 1..p
      Ap+1,s ← Ap,s - Ap+1,p+1 · Ap,p-s+1
  -A

B:=
  for p ∈ 1..maxP
    Bp ← 0
    for s ∈ 1..p
      Bp ← Bp - Rs · Ap,s
    Bp ← (1 - Bp) · R0
  for p ∈ 1..maxP
    Bp ←  $\sqrt{B_p}$ 
  B

```

Рис.3. Программа формирования параметрического описания АР-моделей по алгоритму Левинсона (пример реализации в среде MathCad 6.0 при следующих начальных условиях: $A_{k,k} \equiv 0$, $k=1,2,\dots, \max P$; $B_k \equiv 0$, $k=1,2,\dots, \max P$; R_k , $k=1,2,\dots, \max P$ – отсчеты смещенных оценок автокорреляционной функции выборки).

Табулированные значения авторегрессионных коэффициентов
параметрических моделей пяти основных классов ЭЭГ–сигнала

Таблица 2

Класс ЭЭГ	Значение авторегрессионного параметра модели			
Нормальный альфа–ритм ($i=1$)	$a_1^{(1)}$	-2.0996002529	$a_6^{(1)}$	0.1028204577
	$a_2^{(1)}$	1.8485053201	$a_7^{(1)}$	-0.1172624424
	$a_3^{(1)}$	-0.8067828971	$a_8^{(1)}$	0.2437109177
	$a_4^{(1)}$	0.130439764	$a_9^{(1)}$	-0.117426362
	$a_5^{(1)}$	-0.0611746156	$b_0^{(1)}$	0.1823319848
Замедленный вариант альфа–ритма ($i=2$)	$a_1^{(2)}$	-2.0988473536	$a_6^{(2)}$	0.0826074683
	$a_2^{(2)}$	1.8493280888	$a_7^{(2)}$	-0.1010951105
	$a_3^{(2)}$	-0.8296557452	$a_8^{(2)}$	0.2173943324
	$a_4^{(2)}$	0.1021409406	$a_9^{(2)}$	-0.0824547072
	$a_5^{(2)}$	-0.0515261637	$b_0^{(2)}$	0.1647040114
Убыстренный вариант альфа–ритма ($i=3$)	$a_1^{(3)}$	-2.0831592228	$a_6^{(3)}$	0.1224962368
	$a_2^{(3)}$	1.7745177262	$a_7^{(3)}$	-0.1268485601
	$a_3^{(3)}$	-0.7250207418	$a_8^{(3)}$	0.2171171904
	$a_4^{(3)}$	0.1731579106	$a_9^{(3)}$	-0.1273138872
	$a_5^{(3)}$	-0.0966357503	$b_0^{(3)}$	0.1752233333
Пароксизмальная ЭЭГ–активность ($i=4$)	$a_1^{(4)}$	-1.9268275161	$a_6^{(4)}$	0.1108545088
	$a_2^{(4)}$	1.4777103315	$a_7^{(4)}$	-0.1269405776
	$a_3^{(4)}$	-0.5772724192	$a_8^{(4)}$	0.178207473
	$a_4^{(4)}$	0.1536000317	$a_9^{(4)}$	-0.080728236
	$a_5^{(4)}$	-0.1144480912	$b_0^{(4)}$	0.2289664384
Низкочастотная ЭЭГ–активность ($i=5$)	$a_1^{(5)}$	-2.1402985158	$a_6^{(5)}$	0.0884805334
	$a_2^{(5)}$	1.8739433523	$a_7^{(5)}$	-0.1169191814
	$a_3^{(5)}$	-0.8422262279	$a_8^{(5)}$	0.2371767974
	$a_4^{(5)}$	0.0858358096	$a_9^{(5)}$	-0.0939669752
	$a_5^{(5)}$	-0.0513578125	$b_0^{(5)}$	0.1132552482

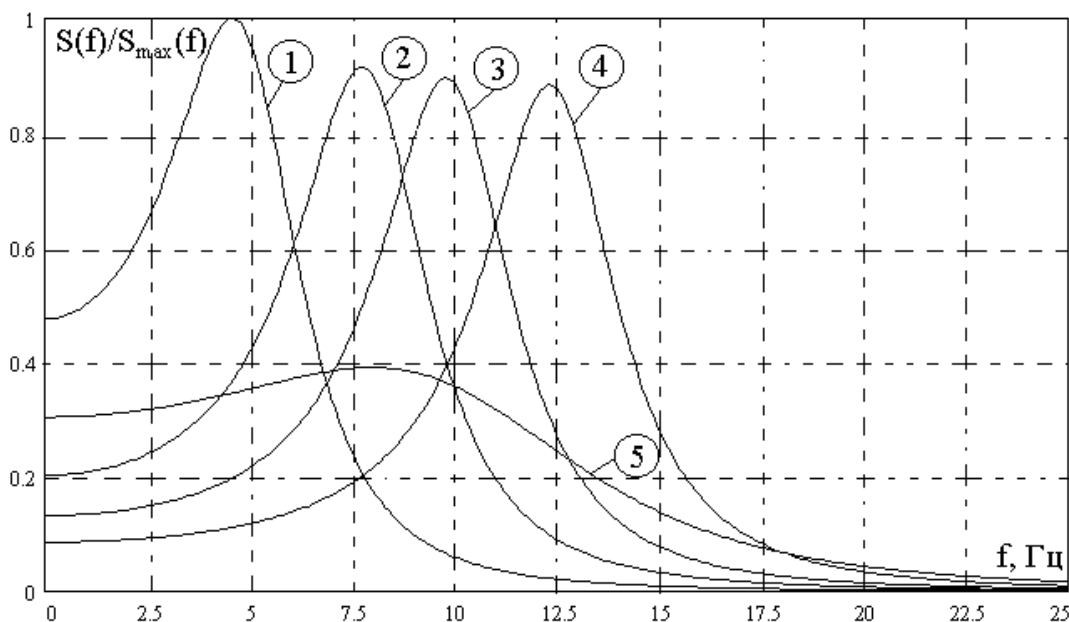


Рис.4. Авторегрессионные оценки функции спектральной плотности мощности пяти основных классов ЭЭГ.

При $|z_k^{(i)}| < 1, i=1,2,\dots,M$ показано, что при этом оценки $\hat{a}_k^{(i)}, k=1,2,\dots, \hat{p}^{(i)}; i=1,2,\dots,M$ являются состоятельными, т.е. сходятся по вероятности к истинному значению $a_k^{(i)}, k=1,2,\dots, p^{(i)}; i=1,2,\dots,M$. Асимптотическая дисперсия оценок не зависит от дисперсии порождающего БШ и определяется истинным значением параметров. Более того, случайная величина $\sqrt{n} \cdot (\hat{a}_k^{(i)} - a_k^{(i)})$ имеет в пределе нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. В неустойчивом случае (по крайней мере один из корней $z_k^{(i)}$ по модулю больше единицы $|z_k^{(i)}| > 1, k=1,2,\dots, p^{(i)}$) оценки параметров модели авторегрессии также состоятельны, однако их предельное распределение уже не является нормальным.

Точность оценивания также имеет немаловажное значение. Анализ различных методов оценивания авторегрессионных параметров позволяет утверждать, что дисперсия оценки коэффициента находится в обратной зависимости от объема дискретных данных, по которым производится оценивание. На рис.5 показаны экспериментально полученные различными методами [4] зависимости среднеквадратического отклонения оценки от объемов обучающих выборок. Не трудно видеть, что после некоторого значения переменной N (объем выборки) точность оценки оказывается инвариантной по отношению к методу оценивания.

В работе [7] проведен теоретический анализ методов формирования описания экспериментально полученных данных на базе параметрических АРСС-моделей произвольного порядка. Показано, что асимптотическое выражение для нижних границ дисперсии оценок параметров, определяемых из неравенства Рао-Крамера, имеет вид

$$\sigma_{a_k^{(i)}}^2 \geq \frac{1}{N} \cdot \left[\left(1 + (a_1^{(i)})^2 + (a_2^{(i)})^2 + \dots + (a_{k-1}^{(i)})^2 \right) - \left((a_{p^{(i)}}^{(i)})^2 + (a_{p^{(i)}-1}^{(i)})^2 + \dots + (a_{p^{(i)}-k+1}^{(i)})^2 \right) \right], k=1,2,\dots, p^{(i)}, i=1,2,\dots,M, \quad (12)$$

и

$$\sigma_{b_k^{(i)}}^2 \geq \frac{1}{N} \cdot \left[\left(1 + (b_1^{(i)})^2 + (b_2^{(i)})^2 + \dots + (b_{k-1}^{(i)})^2 \right) - \left((b_{q^{(i)}}^{(i)})^2 + (b_{q^{(i)}-1}^{(i)})^2 + \dots + (b_{q^{(i)}-k+1}^{(i)})^2 \right) \right], k=1,2,\dots,q^{(i)}, i=1,2,\dots,M. \quad (13)$$

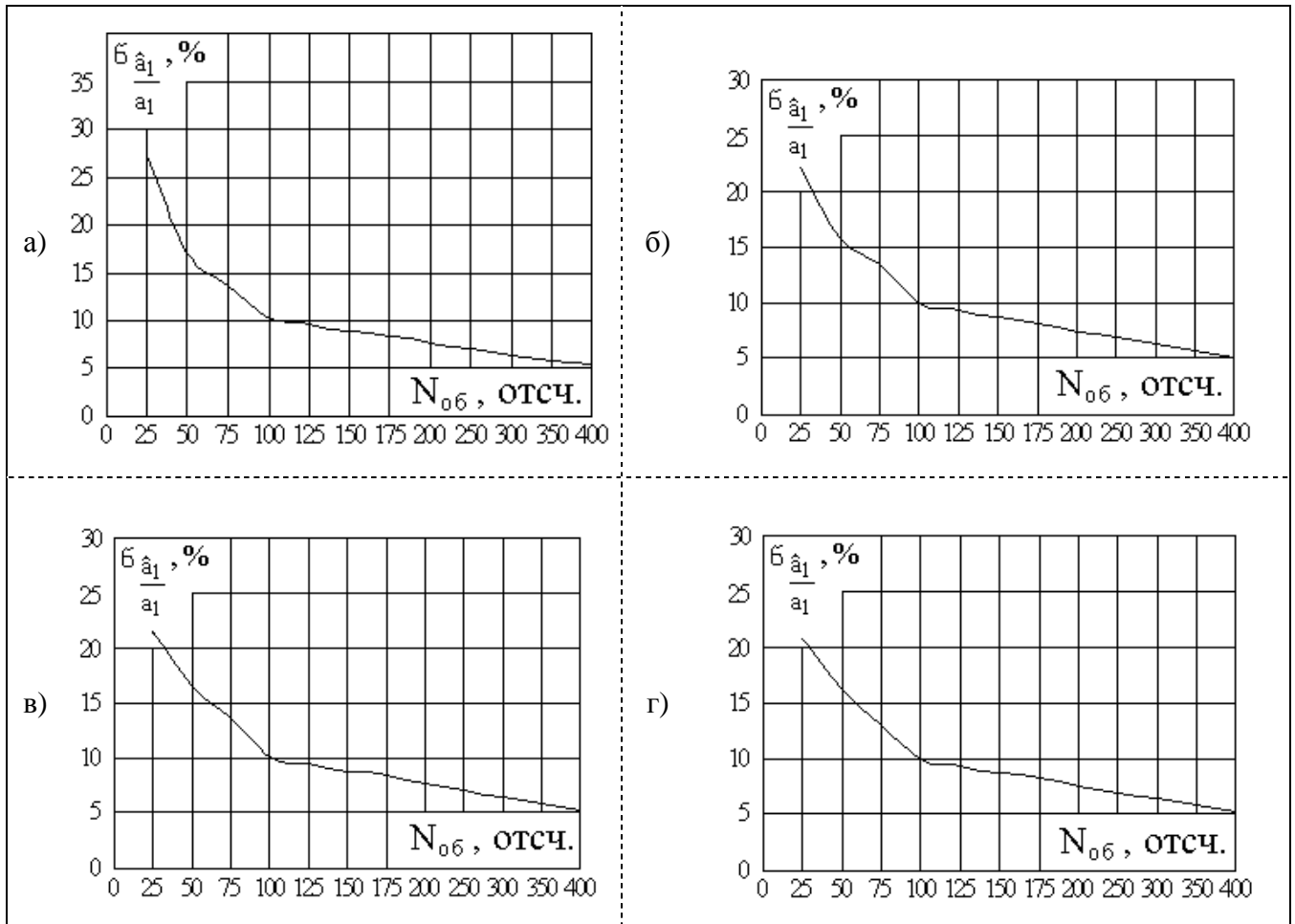


Рис.5. Экспериментальные зависимости СКО оценки коэффициента a_1 от объема обучающей выборки для нормального альфа-ритма. Оценивание: а) по методу Юла-Уолкера на основе алгоритма Левинсона, б) по методу Берга, в) ковариационным методом, г) модифицированным ковариационным методом.

Показано [7], что в случае завышенного порядка модели нижняя граница Рао–Крамера для дисперсии оценок коэффициентов возрастает на величину

$$\Delta\sigma_{\hat{a}_s^{(i)}}^2 = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=p^{(i)}-(s^{(i)}-1)}^{p^{(i)}} (a_k^{(i)})^2, & s^{(i)} = 1, 2, \dots, \min\{\hat{p}^{(i)} - p^{(i)}, p^{(i)}\}; \\ \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=p^{(i)}-(s^{(i)}-1)}^{p^{(i)}} (a_k^{(i)})^2; & s^{(i)} = \hat{p}^{(i)} - p^{(i)} + 1, \dots, \hat{p}^{(i)}, \end{cases} \quad (14)$$

где нижнее выражение существует при $\hat{p} < 2p$.

Заключение

Как и любой другой наукоемкий метод диагностики, электроэнцефалография в обычной клинической практике никогда не превратится в чисто техническую процедуру, автоматически выдающую заключение, а всегда будет развивающимся творческим процессом, обогащающимся за счет расширения возможностей использования средств компьютерной техники.

В предметной области метода электроэнцефалографии вопросы подтверждения качества и адекватности моделей носят, к сожалению, пока еще некоторый эвристический характер. Связано это со сложившимися стереотипами и устоявшимися методиками визуального анализа. Критерий визуальной схожести временной структуры сигнала в сравнении с некоторыми эталонными понятиями сводит методические вопросы определения порядка параметрических моделей к использованию экспертных оценок специалистов-электрофизиологов. Как показывают практические исследования, далеко не во всех методиках предъявляются повышенные требования к детализации сигнала. Зачастую оказывается достаточным ограничиться третьим-четвертым порядком, что значительно облегчит сложность математического аппарата процедур последующей обработки и повысит точность оценивания, в то время как экспертные оценки специалистов, как правило, предлагают использовать порядок моделей не ниже девятого.

Еще одна особенность в решении задачи формирования параметрического описания ЭЭГ связана с ее формализацией. В ряде случаев понятие модели как таковой подменяет окончательную целевую функцию обработки. В частности, при решении задачи сегментации или классификации ЭЭГ приоритет имеет скорее точность оценки момента изменения свойств сигнала или вероятностные характеристики, а не степень приближения в адекватности математического описания. Поэтому процедуру оценивания параметров модели следует рассматривать как некоторый итерационный этап в более общей методике, что достигается некоторыми компромиссными решениями возможно в ущерб истинному порядку модели.

Наличие математического аппарата, однозначно определяющего по дискретным выборочным значениям параметрические модели, существенно облегчает построение целого множества алгоритмов и подходов обработки ЭЭГ, что, в свою очередь, способствует внедрению библиотек стандартных ЭЭГ-сигналов и развитию метода электроэнцефалографии как средства оперативного обнаружения патологий и комплексной оценки общего физиологического состояния жизнедеятельности человека.

Исследования поддержаны пятью персональными грантами (№М99-3.5Д-260, №М01-3.5К-80, №М02-3.5К-127, №М03-3.5К-3, ISSEP №А232-03) Комитета по науке и высшей школе Администрации Санкт-Петербурга.

Литература

1. Айвазян С. А. и др. Прикладная статистика: Исследование зависимостей: Справ. изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин; Под ред. С. А. Айвазяна. — М.: Финансы и статистика, 1985. — 487с., ил.
2. Жирмунская Е. А. и др. Перспективы применения моделей типа авторегрессии–скользящего среднего для анализа ЭЭГ // Е. А. Жирмунская, П. Н. Дубнер, С. Р. Гутман // Успехи физиологических наук. — 1984. — №4. — т.69. — с.6-22.
3. Кашьяп Р. Л., Рао А. Р. Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным: Пер. с англ. — М.: Наука, 1983. — 384с.
4. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 584с., ил.
5. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 848с., ил.
6. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. — М.: Наука, 1992. — 392 с.

7. Friedlander B. On the computation of the Cramer–Rao bound for ARMA parameter estimation. // IEEE Trans. Acoust. Speech, Signal Proc. — 1984. — Vol. ASSP-32. — pp.721-727.